CLASA A VII-A

Problema 1.

a) Arătaţi că niciun pătrat perfect nu dă restul 2 la împărţirea la 11 ;

b) Demonstraţi că oricum am alege 7 numere naturale, există două a căror diferenţă sau sumă se divide la 11.

Cristina Drăgan, Rm. Vâlcea şi Marcel Teleucă, Chişinău

BAREM:

a) Orice număr natural n este de forma $11k + r$, unde $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$...................... **1p**

Atunci $n^2 = (11k + r)^2 = M_{11} + r^2 = M_{11} + r'$, unde $r' \in \{0,1,3,4,5,9\}$ (*)..................... **1p**

Deci niciun pătrat perfect n^2 nu dă restul 2 la împărţirea la 11.. **1p**

b) Avem că $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \forall a, b \in R$ **1p**

Conform (*), la împărțirea la 11 a unui pătrat perfect se pot obține 6 resturi distincte, deci conform principiului cutiei, având 7 numere naturale, vor exista cel puțin două numere ale căror pătrate vor da același rest la împărțirea la 11 .... **1p**

Fie acestea p și q. Atunci $p^2 = 11k_1 + r$ și $q^2 = 11k_2 + r \Rightarrow p^2 - q^2 = (p + q)(p - q) = M_{11}$...... **1p**

Cum 11 este număr prim și $11/(p + q)(p - q) \Rightarrow 11/(p + q)$ sau $11/(p - q)$.................................. **1p**

CLASA A VII-A

Problema 2.

Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, notăm cu $a_n = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (2n)$.

Să se arate că:

a) a_n divide pe a_{n+1};

b) 2^n divide pe a_n;

c) 2^{n+1} *nu divide pe* a_n.

Maria Pop, Cluj Napoca

BAREM:

a) $a_{n+1} = (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$ **1p**

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{n+1} = 2(2n+1) \Rightarrow a_n$ divide pe a_{n+1} **2p**

b) Conform (a) avem $\frac{a_2}{a_1} = 2 \cdot 3, \frac{a_3}{a_2} = 2 \cdot 5, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \cdot (2n-1)$.

Înmulțind aceste relații membru cu membru obținem $\frac{a_n}{a_1} = 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$........... **1p**

Cum $a_1 = 2$ avem că $a_n = 2^n \cdot [3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)] \vdots 2^n$ (*)........................ **1p**

c) Conform (*), $a_n = 2^n \cdot [3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)]$, iar paranteza reprezintă un produs de numere impare, care este un număr impar, deci 2^{n+1} nu divide pe a_n **2p**

Problema 3.

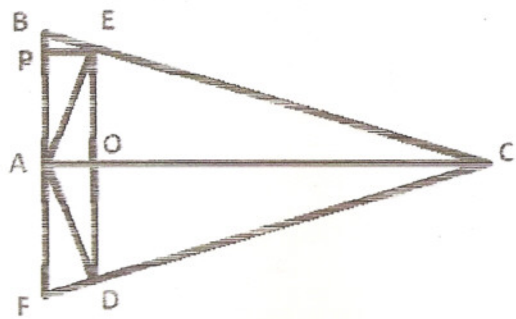
Fie AECD un patrulater convex în care $m(\angle ECD)=30^\circ$, $m(\angle AEC)=m(\angle ADC)=90^\circ$, $[AE]\equiv[AD]$ şi $AC\cap ED=\{O\}$. Paralela prin A la ED intersectează pe CE şi CD în B, respectiv F.

a) Demonstraţi că $AC\perp ED$;

b) Dacă perimetrul triunghiului ΔAOE este de 30 cm, calculaţi perimetrul triunghiului ΔABC .

Marin Mazilu, Rm. Vâlcea

BAREM:



a) $\Delta AEC\equiv\Delta ADC\Rightarrow\Delta ECD$ isoscel și $m(\angle ECA)=m(\angle DCA)=15^0$ 1p

În ΔECD isoscel avem că CO bisectoare $\Rightarrow$ CO înălțime $\Rightarrow$ $AC\perp ED$ 1p

b) ΔAEO dreptunghic în E, $m(\angle ECA)=15^0$ și EO înălțime $\Rightarrow EO=\frac{AC}{4}\Rightarrow AC=4\cdot EO$........ 1p

ΔBAC dreptunghic în A, $m(\angle BCA)=15^0$ și AE înălțime $\Rightarrow AE=\frac{BC}{4}\Rightarrow BC=4\cdot AE$........ 1p

Fie $EP\perp AB$, $P\in AB$; Avem că $[EP]\equiv[OA]$ 1p

ΔBEA dreptunghic în E, $m(\angle BAE)=15^0$ și EP înălțime $\Rightarrow EP=\frac{AB}{4}\Rightarrow AB=4\cdot EP=4\cdot AO$ 1p

$P_{ABC}=AB+BC+CA=4\cdot AO+4\cdot AE+4\cdot EO=4(AO+AE+EO)=4\cdot P_{AEO}=4\cdot 30=120$ cm 1p

Problema 4.

Fie un triunghi având lungimile laturilor proporționale cu numerele 2, 3 și 4.
Demonstraţi că triunghiul nu poate avea un unghi cu măsura de 60° .

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

BAREM:

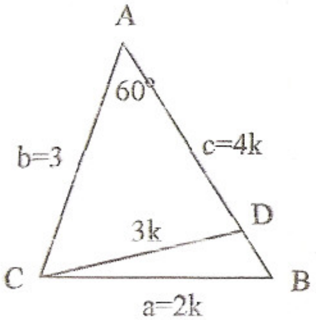
Fie ΔABC având lungimile laturilor a, b, $c \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k, k \in \mathbb{R}_+$........ **1p**

Cazul 1: Dacă $m(\measuredangle A) = 60°$.

Fie $D \in (AB)$ astfel încât $AD = AC = 3k \Rightarrow \Delta$ACD echilateral

Atunci $CD = 3k \Rightarrow DB = k$ (fals: $CD = CB + BD$)

Deci $m(\measuredangle A) \neq 60°$.. **2p**



Cazul 2: Dacă $m(\measuredangle B) = 60°$.

Cum $BC = \frac{AB}{2} \Rightarrow m(\measuredangle C) = 90°$.

Fie $D \in (BC$ astfel încât $BD = 4k \Rightarrow \Delta$ABD echilateral

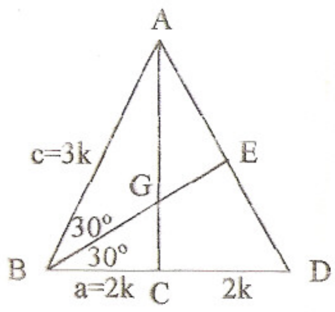
Fie E mijlocul segmentului [AD] și $AC \cap BE = \{G\}$.

Avem $m(\measuredangle GAB) = m(\measuredangle GBA) = 30° \Rightarrow$ GB = GA.

În ΔGBC, cu $m(\measuredangle B) = 30°$ avem că $GC = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}GA$, iar AC = 3k.

Atunci GC = k, GB = 2k și BC = 2k (fals)

Deci $m(\measuredangle B) \neq 60°$.. **2p**



Cazul 3: Dacă $m(\measuredangle C) = 60°$.

Fie $D \in (AC)$ astfel încât $CD = 2k \Rightarrow \Delta$BCD echilateral

Atunci $DA = k \Rightarrow BD = 2k$ (fals: AB= $BD + DA$)

Deci $m(\measuredangle C) \neq 60°$.. **2p**